

# 非零奇异值和频率的关系及其在 信号分解中的应用

赵学智, 叶邦彦

(华南理工大学机械与汽车工程学院, 广东广州 510640)

**摘 要:** 研究了 Hankel 矩阵方式下确定性信号的非零奇异值和信号所含频率数量之间的关系, 发现只要矩阵维数大于信号中频率数量的二倍, 此后不管维数再怎样增大, 非零奇异值的数目始终维持为信号中频率数量的两倍不变. 研究了非零奇异值和单个频率之间存在的对应关系, 提出利用奇异值分解来分离单个的频率成分, 发现了奇异值分解分离单个频率成分的条件, 在这种条件下奇异值分解可以准确地分离出任何的单个频率成分. 利用奇异值分解的这一特性对轴承振动信号进行特征提取, 分离出了轴承各个振动频率清晰的时域波形, 由此准确地揭示了轴承的实际振动状态.

**关键词:** 奇异值分解; 非零奇异值; 信号分解; 矩阵维数

**中图分类号:** TN911.72; O151.21 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2017)08-2008-11

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2017.08.029

## The Relationship Between Non-Zero Singular Values and Frequencies and Its Application to Signal Decomposition

ZHAO Xue-zhi, YE Bang-yan

(School of Mechanical and Automotive Engineering, South China University of Technology, Guangzhou, Guangdong 510640, China)

**Abstract:** The relationship between the number of non-zero singular values of the deterministic signal under the Hankel matrix and the number of frequencies in this signal is studied. It is found that if the dimension of matrix is larger than two times the number of frequencies, then no matter how much the dimension of matrix is increased, the number of non-zero singular values is always twice as much as the number of frequencies. The corresponding relationship between the non-zero singular values and single frequency component is studied, and singular value decomposition (SVD) is proposed to separate the single frequency component. The condition under which SVD separates the single frequency component is found, and SVD can accurately separate any single frequency component under this condition. This property of SVD is applied to the feature extraction of the bearing vibration signal, the time domain waveform of each vibration frequency is accurately extracted and the bearing vibration status is accurately revealed.

**Key words:** singular value decomposition; non-zero singular value; signal decomposition; matrix dimension

### 1 引言

奇异值分解 (Singular Value Decomposition, SVD) 在图像处理、人脸识别、数据压缩、信号消噪等方面有广泛的应用, 但是在 SVD 的很多应用中, 都需要面对一个非常重要的问题, 那就是非零奇异值的选取问题. 如消除超声图像中的杂波干扰时, 非零奇异值的选取决定着杂波消除的效果好坏<sup>[1]</sup>. 另外, 在图像处理和人脸识别

中, 常常用到图像矩阵的低秩化技术<sup>[2]</sup>, 这种低秩化的实质就是选择合适的非零奇异值进行 SVD 重构. 在基于 SVD 的数据压缩中, 非零奇异值的选取与压缩效果密切联系<sup>[3]</sup>. 在交通路网语义谱聚类中, 非零奇异值的选取会影响语义子空间的可靠性<sup>[4]</sup>. 信号消噪也是 SVD 的一个重要应用领域<sup>[5,6]</sup>, 而 SVD 消噪的重要先决条件是要确定合适的非零奇异值数目.

为了选择合适的奇异值数目, 研究者们提出了很

多种方法,如奇异熵法<sup>[7]</sup>、差分谱法<sup>[8]</sup>、曲率谱法<sup>[9]</sup>等,这些方法都是利用奇异值序列进行各种数学运算,然后根据计算结果中的特征点来选取奇异值,但是这些方法在实际中总是难以适用千变万化的情况. 经过对奇异值选取问题的深入思考,作者认为,对于一维信号的处理来说,要从根本上解决奇异值的选取问题,首先必须要弄清另一个问题,即非零奇异值数量是否和信号中的频率有内在联系? 作者通过研究,发现二者之间确实存在深刻的内在联系. 利用这种联系,不仅在消噪时可以方便地选择正确的奇异值数量,更重要的是,我们发现,只要满足一定的条件,利用这种联系 SVD 还能分离出信号中任何单个的频率成分. 文中发现了这种分离条件,并提出了分离单个频率成分时奇异值的选择原则,在这种分离条件和选择原则下,只要是在幅值谱中能够分辨出来的频率成分, SVD 总是可以将它从原始信号中分离出来. 文中最后通过实例验证了这一方法优良的单频率分离效果.

## 2 非零奇异值数量与频率数量的关系

SVD 是一种矩阵正交化分解方法,对于一个实矩阵  $\mathbf{H} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ,不管其行列是否相关,必定存在正交矩阵  $\mathbf{U} \in \mathbf{R}^{m \times m}$  和正交矩阵  $\mathbf{V} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,使得

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^T \quad (1)$$

成立,式中  $\mathbf{D} = [\text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q), \mathbf{O}]$  或者其转置,这取决于  $m < n$  还是  $m > n$ ,  $\mathbf{D} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{O}$  表示零矩阵,  $q = \min(m, n)$ , 且有:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_q \geq 0$ , 它们是矩阵  $\mathbf{H}$  的奇异值.

对一维的数字信号  $x(i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ,  $N$  是信号的长度,在应用 SVD 处理之前,必须要用  $x(i)$  构造一个矩阵,这矩阵一般采用如下形式<sup>[10]</sup>:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} x(0) & x(1) & \cdots & x(n-1) \\ x(1) & x(2) & \cdots & x(n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x(N-n) & x(N-n+1) & \cdots & x(N-1) \end{pmatrix} \quad (2)$$

式中,  $1 < n < N$ . 令  $m = N - n + 1$ , 则  $\mathbf{H} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ , 此矩阵称为 Hankel 矩阵. 将左正交矩阵  $\mathbf{U}$  用列向量表示,  $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m)$ ,  $\mathbf{u}_i \in \mathbf{R}^{m \times 1}$ ; 右正交矩阵  $\mathbf{V}$  也用列向量表示,  $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ ,  $\mathbf{v}_i \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ , 则选择前面适当的非零奇异值通过 SVD 重构可以得到一个新的矩阵  $\mathbf{H}'$ :

$$\mathbf{H}' = \sum_{i=1}^l \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T \quad (3)$$

式中  $l$  是所选择的非零奇异值的数目,从矩阵  $\mathbf{H}'$  恢复出的信号就是消噪结果,这当中的关键就是  $l$  的确定. 如果  $l$  选择不恰当,就会丢失原信号的一些频率信息,甚至造成消噪结果的畸变,而目前的奇异值选择方法在实用中总是难以尽如人意. 经过对奇异值选取问题的深入思考,

作者认为,要从根本上解决这一问题,首先必须要弄清另一个问题,即非零奇异值数目和频率数量是否存在确定的内在联系? 从理论上分析这一问题很难,作者通过反复的试验研究,发现了这一问题的答案. 我们采用的方法是:从含有一个频率的信号出发,逐步增加信号中频率的个数,利用信号构造不同维数的 Hankel 矩阵进行 SVD 处理,观察并分析非零奇异值数目的变化. 通过这样反复的实验,我们发现了如下的重要规律:

对于一个含有固定频率数量的确定性信号,利用其构造  $m \times n$  的 Hankel 矩阵,令  $q = \min(m, n)$ ,随着  $q$  的增大,非零奇异值的数目将逐渐增多,但是当  $q$  大于信号中频率数量的两倍之后,非零奇异值数目将稳定下来,此后不管  $q$  再怎样增大,非零奇异值的数目始终保持为信号中频率数量的两倍不变.

下面给出这样的一个试验结果. 采用 7 个信号进行试验,下一个信号在前一个信号的基础上增加一个频率,且增加的频率值逐渐增大,其幅值也逐渐加大,而相位随机,这 7 个信号如下所示:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 1.6 \sin(t); \\ x_2(t) &= 1.6 \sin(t) + 3.8 \sin(4t + 0.56); \\ x_3(t) &= 1.6 \sin(t) + 3.8 \sin(4t + 0.56) + 5.2 \sin(12t + 1.35); \\ x_4(t) &= 1.6 \sin(t) + 3.8 \sin(4t + 0.56) + 5.2 \sin(12t + 1.35) + 7.6 \sin(20t + 2.58); \\ x_5(t) &= 1.6 \sin(t) + 3.8 \sin(4t + 0.56) + 5.2 \sin(12t + 1.35) + 7.6 \sin(20t + 2.58) + 9.8 \sin(30t + 3.12); \\ x_6(t) &= 1.6 \sin(t) + 3.8 \sin(4t + 0.56) + 5.2 \sin(12t + 1.35) + 7.6 \sin(20t + 2.58) + 9.8 \sin(30t + 3.12) + 12 \sin(56t + 2.79); \\ x_7(t) &= 1.6 \sin(t) + 3.8 \sin(4t + 0.56) + 5.2 \sin(12t + 1.35) + 7.6 \sin(20t + 2.58) + 9.8 \sin(30t + 3.12) + 12 \sin(56t + 2.79) + 15 \sin(72t + 1.29). \end{aligned}$$

对每个信号在  $[0, 2\pi]$  内均采集 512 点,利用它们构造 Hankel 矩阵并计算其奇异值. 为简单起见,这里仅给出  $256 \times 257$  的 Hankel 矩阵下各个信号的奇异值结果,如图 1(a) 所示,图中从左至右依次为  $x_1(t) \sim x_7(t)$  的奇异值曲线. 从图 1(a) 可见,当信号每增加一个频率成分,不管这个频率值、幅值、相位如何,非零奇异值的数目总是只增加两个. 在下一个信号的奇异值曲线中,除了新增加的两个奇异值较大外,其余的奇异值均和上一个信号的奇异值大小几乎相等. 为了分析新增的两个奇异值之所以较大是因频率值的增大引起的还是因幅值的增大而引起的,我们利用另外 6 个信号  $y_1(t) \sim y_6(t)$  进行实验,  $y_1(t) \sim y_6(t)$  如下所示:

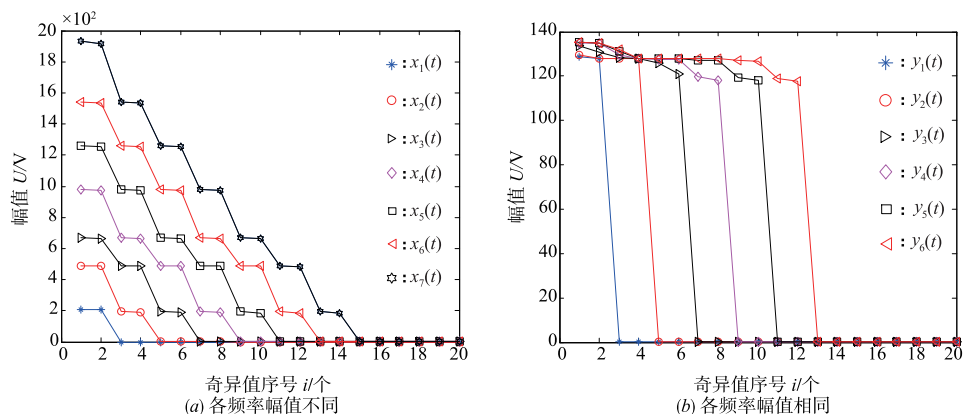


图1 非零奇异值数量与频率数量的关系

$$\begin{aligned}
 y_1(t) &= \sin(2t + 1.16); \\
 y_2(t) &= \sin(2t + 1.16) + \sin(6t + 0.59); \\
 y_3(t) &= \sin(2t + 1.16) + \sin(6t + 0.59) + \sin(15t + 1.58); \\
 y_4(t) &= \sin(2t + 1.16) + \sin(6t + 0.59) + \sin(15t + 1.58) + \sin(20t + 0.79); \\
 y_5(t) &= \sin(2t + 1.16) + \sin(6t + 0.59) + \sin(15t + 1.58) + \sin(20t + 0.79) + \sin(26t + 1.92); \\
 y_6(t) &= \sin(2t + 1.16) + \sin(6t + 0.59) + \sin(15t + 1.58) + \sin(20t + 0.79) + \sin(26t + 1.92) + \sin(30t + 1.15);
 \end{aligned}$$

其中  $y_1(t)$  只含一个频率, 以后的每个信号依次增加一个频率, 新增的频率值逐渐加大, 但是所有频率的幅值相同. 同样给出  $256 \times 257$  的 Hankel 矩阵下  $y_1(t) \sim y_6(t)$  的奇异值结果, 如图 1(b) 所示, 图中从左到右依次为  $y_1(t) \sim y_6(t)$  的奇异值曲线. 可见每增加一个频率, 奇异值数目同样也是增加两个, 但是却没有了图 1(a) 的那种阶梯型效果, 这说明图 1(a) 中新增的两个奇异值较大的原因是因为幅值的增大而引起的. 关于奇异值与频率值、幅值之间的关系在后面还将做进一步的理论分析. 在图 1 中如果改用其它频率, 也能得到类似的结果, 由这种结果我们还可以得到另一个重要的结论:

在 Hankel 矩阵方式下, 若矩阵维数为  $m \times n$ , 而  $q = \min(m, n)$ , 对一个频率成分  $x(t) = a \sin(\omega t + \phi)$  来说, 不管频率值  $\omega$  有多大, 也不管幅值  $a$  以及相位  $\phi$  有多大, 当  $q \geq 2$  时, 这个频率成分总是只产生两个非零奇异值. 并且我们在试验中发现, 当  $q$  继续增大时, 虽然非零奇异值数目不会增加, 但是这两个非零奇异值在数值上将增大, 并且越来越趋于相等. 当信号中存在多个频率时, 同一个频率产生的两个奇异值一前一后紧密排列在一起, 中间绝不会有其它频率产生的奇异值

存在.

### 3 SVD 分离单个频率成分的条件

由上节的结果可知, 当矩阵维数大于信号中频率数量的二倍时, 一个频率成分产生两个非零奇异值, 这自然使人联想到: 是否可以利用某个频率所对应的两个非零奇异值进行 SVD 重构, 从而分离出这个频率成分呢? 然而答案却没有那么简单. 我们发现了一个非常值得注意的现象: 对于一个含有  $I$  个频率成分的信号, 利用这  $I$  个频率成分产生的  $2I$  个非零奇异值进行 SVD 重构, 不管原始信号中是否有噪声, 总是可以恢复出这  $I$  个频率成分, 这一点毫无疑问, 但是如果仅仅选择其中的某个频率所对应的两个非零奇异值进行 SVD 重构, 却不一定能恢复这个频率成分, 在重构结果中往往还会存在其他频率成分. 这一现象说明, 对于一个含有多个频率的信号来说, 虽然每一个频率产生两个非零奇异值, 但是这两个非零奇异值却会受到其它频率的影响, 因此虽然选择全部频率产生的非零奇异值进行重构可以恢复所有频率成分, 但是选择单个频率对应的两个非零奇异值进行重构却不能恢复这个频率成分. 那么在什么样的情况下才能使单个频率的两个非零奇异值不受其它频率的影响呢? 我们经过反复的探索, 找到了这个问题的答案, 而这个答案是出人意料的, 我们有如下的结论:

对于含有多个频率成分的原始信号  $x(t)$  进行 SVD 分解, 如果  $x(t)$  中没有任何噪声, 那么利用某个频率对应的两个非零奇异值进行 SVD 重构不一定能恢复出这个频率成分, 要想利用 SVD 恢复出单个的频率成分, 必须对原始信号  $x(t)$  添加零均值的白噪声.

SVD 的这种特性确实是令人非常意外的, 一般说来, 信号中的噪声有害的, 我们总是要尽可能地消除信号中的噪声, 而 SVD 分离出单个频率成分的前提条件却居然是原始信号中必须存在噪声. 从直观上来看, 添

加噪声后, Hankel 矩阵相邻两行的相关性减弱了. 对于无噪声数字信号  $x(i)$  构造的  $m \times n$  维 Hankel 矩阵, 其第  $i$  行为:  $x(i-1), x(i), \dots, x(i+n-2)$ , 第  $i+1$  行为:  $x(i), x(i+1), \dots, x(i+n-1)$ , 很显然, 第  $i+1$  个行向量仅滞后第  $i$  个行向量一个采样时间单位, 它们之间是高度相关的, 其相关系数为:

$$R_{i,i+1} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} [x(i-1+k) - \mu_i][x(i+k) - \mu_{i+1}]}{\sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} [x(i-1+k) - \mu_i]^2} \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} [x(i+k) - \mu_{i+1}]^2}} \quad (4)$$

式中,  $\mu_i$  和  $\mu_{i+1}$  分别为第  $i$  行和第  $i+1$  行的均值. 对  $x(i)$  添加零均值的白噪声  $\xi(i)$  后, 利用白噪声与确定性信号的无关性, 可以证明相邻两个行向量的相关系数变为:

$$R_{i,i+1} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} [x(i-1+k) - \mu_i][x(i+k) - \mu_{i+1}] - \sum_{k=0}^{n-1} [\xi(i-1+k)\mu_{i+1} + \xi(i+k)\mu_i]}{\sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} [x(i-1+k) + \xi(i-1+k) - \mu_i]^2} \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} [x(i+k) + \xi(i+k) - \mu_{i+1}]^2}} \quad (5)$$

可见与式(4)相比, 在式(5)中的分子减去了大量噪声, 而分母却增加了大量噪声, 因此相关系数大为减少, 这意味着相邻两行的相关性大为降低. 根据线性代数理论, 这种相关性的降低将导致矩阵的秩变大, 而秩的变大将导致非零奇异值数量的增加, 从而改变了原始信号的非零奇异值分布, 因此单个频率的非零奇异值分布必然受到影响, 这种影响应该有利于单个频率的分离.

可以实际观察一下添加噪声后信号奇异值的变化. 设有 4 个频率的信号:

$$x(t) = \sin(3t) + 1.5\sin(8t + 0.35) + 2.4\sin(14t + 1.26) + 3\sin(20t + 0.98)$$

对此信号在  $[0, 2\pi]$  内采集 512 点, 并叠加零均值的白噪声  $\xi(t)$ , 得到含噪信号  $f(t) = x(t) + \xi(t)$ , 其中信号和噪声能量之比为 1.4175. 在不同维数的 Hankel 矩阵下, 分别计算  $f(t)$ 、 $x(t)$  和  $\xi(t)$  的奇异值, 得到的结果如图 2 所示(图中只绘出前 20 个奇异值). 设矩阵行数为  $m$ 、列数为  $n$ , 而  $q = \min(m, n)$ , 从图 2 可看出, 在不同的矩阵维数下, 确定性信号  $x(t)$  总是只有 4 对非零奇异值, 随着  $q$  值的增加, 每一对中的两个非零奇异值逐渐接近; 而含噪信号  $f(t)$  的奇异值都是非零的, 但是只有前 8 个非零奇异值与  $x(t)$  的 8 个非零奇异值比较接近, 由于受噪声的影响, 它们之间有一定的偏差, 当  $q$  值较小时, 这种偏差较大, 但随着  $q$  值的增加, 这种偏差逐渐变小; 噪声  $\xi(t)$  的奇异值则与  $f(t)$  从第 9 个奇

值开始的后续非零奇异值吻合得很好, 这说明  $f(t)$  中从第 9 个奇异值开始的后续奇异值是噪声产生的. 如果在  $x(t)$  中改用其它的频率, 并叠加不同比例的噪声, 也能得到类似结果, 总结起来, 我们可以得到下面的结论:

设含噪信号  $f(t)$  中有  $I$  个频率成分, 信号中的噪声对这  $I$  个频率成分产生的  $2I$  个非零奇异值有一定的扰动, 但当  $f(t)$  所构造的 Hankel 矩阵的  $q$  值逐渐增大时, 这  $2I$  个非零奇异值受噪声的影响逐渐减小, 而噪声的奇异值则会排到这  $2I$  个非零奇异值之后.

根据这一结论, 在构造 Hankel 矩阵时, 总是使矩阵的  $q$  值为最大, 以使各频率分量的奇异值受噪声的影响最小, 当含噪信号  $f(t)$  的长度为  $N$ , 可取行  $m = N/2$ 、列  $n = N/2 + 1$  ( $N$  是偶数) 或行  $m = (N + 1)/2$ 、列  $n = (N + 1)/2$  ( $N$  是奇数) 构造 Hankel 矩阵, 这样可以取到最大的  $q$  值, 而此时  $f(t)$  的奇异值向量可以写成:

$$\sigma_f = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{2I}, \sigma_\xi, \dots, \sigma_\xi) \quad (6)$$

即前  $2I$  个非零奇异值是由  $I$  个频率成分产生的, 此后的就是噪声奇异值. 在这种情况下利用某个频率对应的两个非零奇异值进行 SVD 重构, 可以分离出这个频率成分.

对一个实际的含噪信号, 尽管采取了最大的矩阵维数, 但是噪声对各个频率的奇异值产生的扰动不可能完全消除. 添加的噪声比例越大, 各个频率对应的非零奇异值受到的扰动就越大, 则从式(3)可见, 重构矩阵  $H'$  的误差也将越大, 这意味着重构信号的误差也就越大. 而如果噪声添加的比例过小, 对单个频率的分离效果却又不太好, 因此噪声的添加比例是一个折中的问题. 经过反复的试验, 我们认为, 添加的噪声的能量一般占确定性信号能量的 10% ~ 30% 为宜, 在这一范围内, 既能使 SVD 对单个频率取得很好的分离效果, 同时分离出来的频率又不至于受噪声影响太大.

最后来讨论一下需要注意的几个问题. 当原始信号  $x(t)$  中存在直流分量时, 直流分量会产生一个奇异值, 为了消除直流分量的影响, 在利用 SVD 进行单个频率的分离之前, 必须对  $x(t)$  进行零均值化, 这在  $x(t)$  中减去其均值即可. 在零均值的情况下, 对于单个频率的分离, 我们总结了奇异值选择的三个原则: (1) 为了得到正确的信号波形, 奇异值必须成对选取. (2) 不能选择在序号上不连续的两个奇异值来进行配对, 例如, 选择  $\sigma_i$  和  $\sigma_j$  这两个奇异值配对进行 SVD 重构是不对的, 因为任一频率产生的两个非零奇异值都是紧密排列在一起的, 序号上不连续的两个奇异值必定属于两个不同的频率, 而如果只选择某频率的两个奇异值中的一个来重构这个频率, 会造成重构波形的畸变. (3) 因每个频率只产生两个非零奇异值, 它们又是紧密排列在

一起的,因此奇异值的选择必须从奇数序号开始,到偶数序号结束.例如选择 $\sigma_2$ 和 $\sigma_3$ 进行配对是错误的,虽然它们在序号上是连续的,但是它们并不属于同一个

频率, $\sigma_1$ 和 $\sigma_2$ 才属于同一个频率,而 $\sigma_3$ 和 $\sigma_4$ 属于另一个频率.

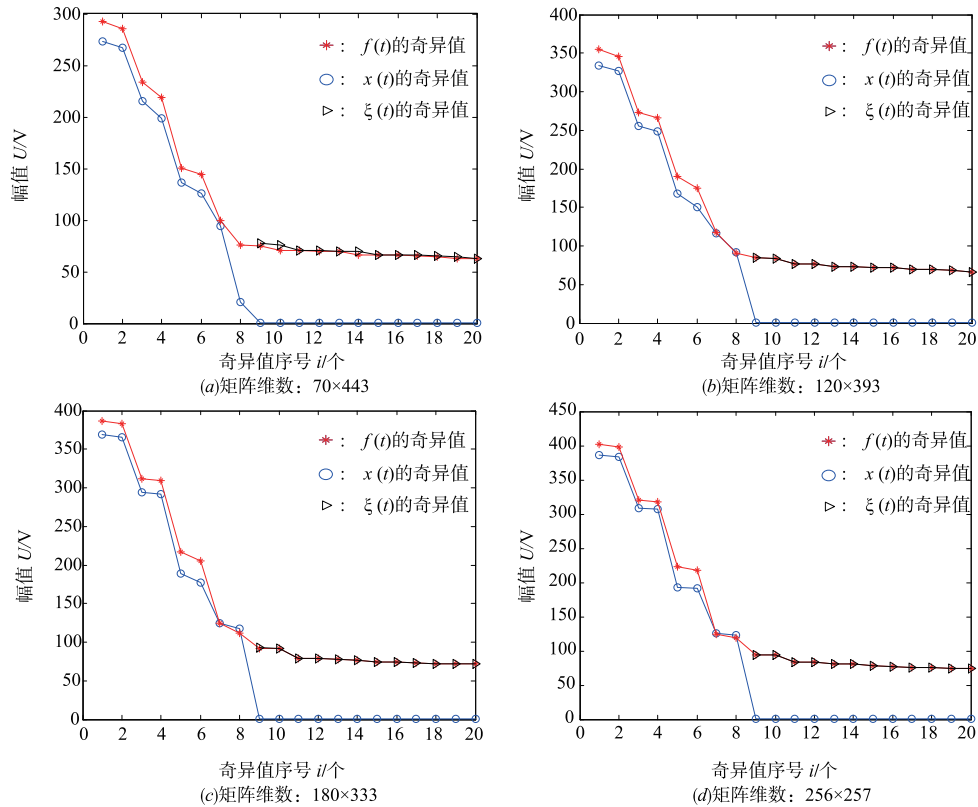


图2  $x(t)$ 、 $f(t)$ 和 $\xi(t)$ 的奇异值之间的关系

#### 4 对模拟信号的分离实例

对信号  $x(t) = \sin(2\pi \cdot 2t) + \sin(2\pi \cdot 3t + 0.78) + \cos(2\pi \cdot 7t) + \cos(2\pi \cdot 19t + 1.21)$  以采样频率 512Hz 采集 1024 点数据,结果如图 3(a) 所示,其幅值谱如图 3(b). 现在利用非零奇异值与频率的内在联系来分离  $x(t)$  中的这 4 个频率成分. 首先不添加噪声,直接利用  $x(t)$  构造  $512 \times 512$  的 Hankel 矩阵并进行 SVD, 得到  $x(t)$  的奇异值结果如图 4 所示,在图中用‘o’表示,可见  $x(t)$  只有 8 个非零奇异值,这与  $x(t)$  中含 4 个频率的情况相符. 现分别选取  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$  和  $\sigma_4$ 、 $\sigma_5$  和  $\sigma_6$ 、 $\sigma_7$  和  $\sigma_8$  这四对奇异值进行 SVD 重构,即有:

$$\mathbf{H}_i = \sum_{j=2i-1}^{2i} \sigma_j \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^T, \quad i=1,2,3,4 \quad (7)$$

采用平均法<sup>[11]</sup>从  $\mathbf{H}_i$  中恢复出信号,得到四个分量信号如图 5. 从图 5 可见,此时 SVD 对单个频率成分的分离效果很差,在每个分量信号中至少都有两个频率成分存在,而在第 1 个分量信号中四个频率成分全都存在,显然此时的频率分离效果是很糟糕的.

现在向原始信号  $x(t)$  中添加零均值的白噪声,信

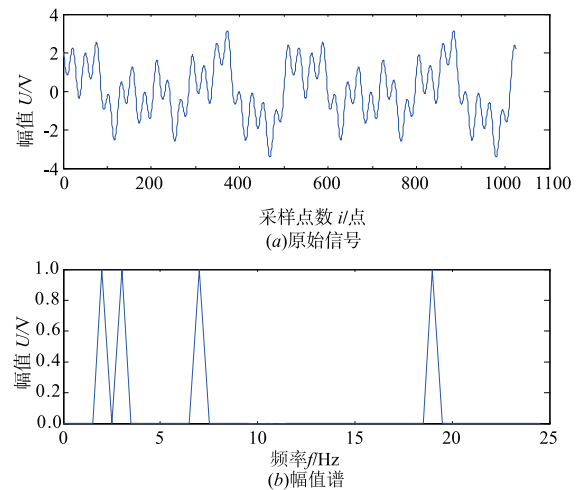


图3 一个模拟的信号及其幅值谱

号和噪声能量之比为 6.4588,得到含噪信号及其幅值谱如图 6 所示. 利用这含噪信号构造  $512 \times 512$  的 Hankel 矩阵并进行 SVD,将得到的奇异值同样绘于图 4 中,在图中用‘\*’表示,可见其前 8 个非零奇异值位于原信号的非零奇异值附近,但是存在一定扰动. 将这前 8 个非零奇异值分成四对,根据式(7)进行重构,同样利

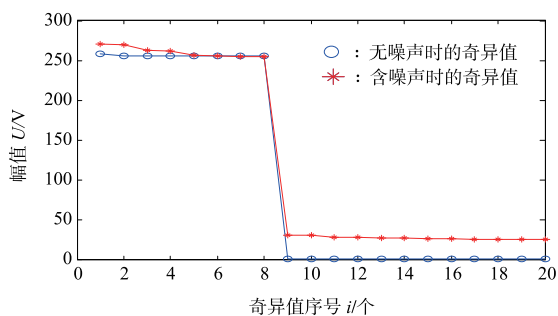
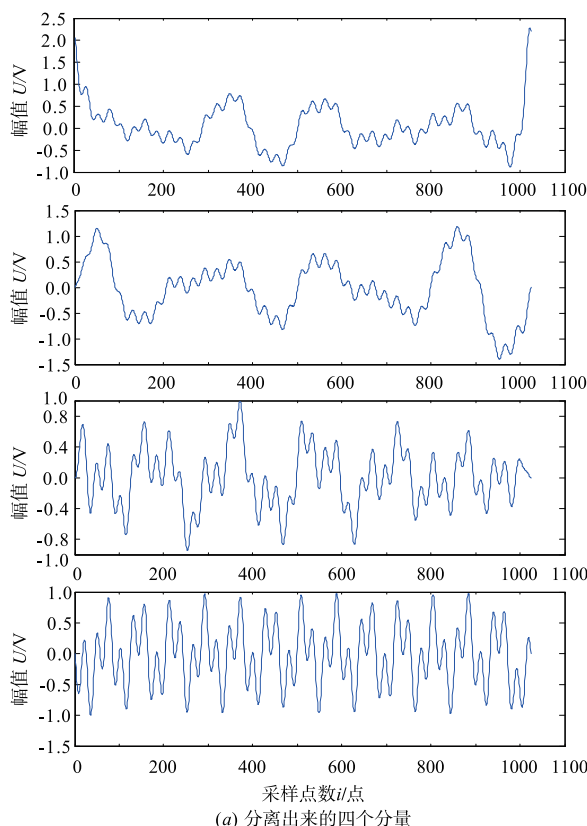
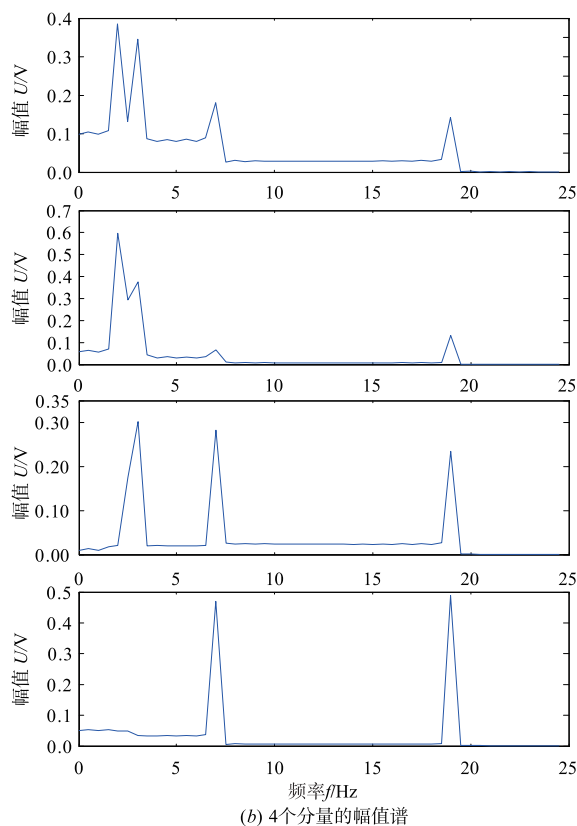


图4 无噪声时和添加噪声后信号的奇异值

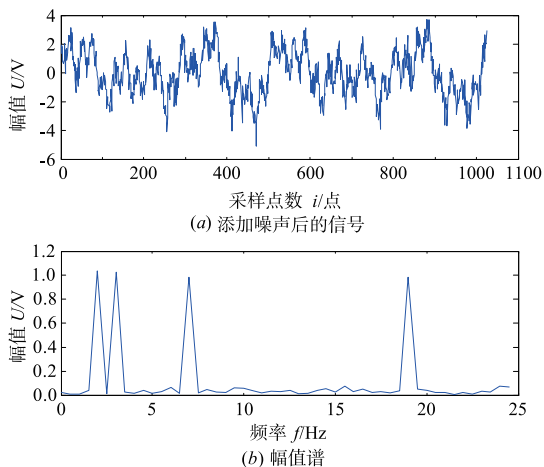


(a) 分离出来的四个分量



(b) 4个分量的幅值谱

图5 不添加噪声时SVD的信号分离结果



(a) 添加噪声后的信号

(b) 幅值谱

图6 添加噪声后的信号及其幅值谱

用平均法<sup>[11]</sup>从重构矩阵  $\mathbf{H}_i$  中恢复出分量信号,结果如图 7 所示.从图 7 可见,此时已经实现了对单个频率的完全分离,得到的每个分量信号中都只有一个频率成分,其中第一个分量信号是原始信号中的  $\sin(2\pi \cdot 2t)$ 、第二个分量信号是  $\sin(2\pi \cdot 3t + 0.78)$ 、第三个分量信号是  $\cos(2\pi \cdot 19t + 1.21)$ 、第四个分量信号是  $\cos(2\pi \cdot 7t)$ ,图中的红色虚线是理想信号.可见加噪后 SVD 对单个频率取得了相当好的分离效果,尽管对原始信号添加了噪声,但是分离出来的单个频率成分的

信号波形却非常干净,与理想信号几乎完全吻合,具有零相移特性. SVD 的这种零相移特性不是偶然的,设原始含噪信号为  $f(t)$ ,而 SVD 分离出来的各频率分量为  $f_i(t)$ ,可以证明它们之间的关系是:

$$f(t) = \sum_i f_i(t) + n(t) \quad (8)$$

式中  $n(t)$  是噪声分量,是利用各频率分量的奇异值之外的其它所有非零奇异值重构而成.从式(8)可见,SVD 分离出来的各频率分量和原始信号是一种简单的叠加关系,对某一频率分量  $f_i(t)$ ,SVD 将它从原始信号中分离的过程相当于这一频率成分从原始信号中被简单地减出来,这种减法操作不会影响被分离频率分量的相位,某频率分量在原始信号中是怎样的相位,它被减出来之后还是怎样的相位,因此 SVD 的这种分离具有零相移特性.

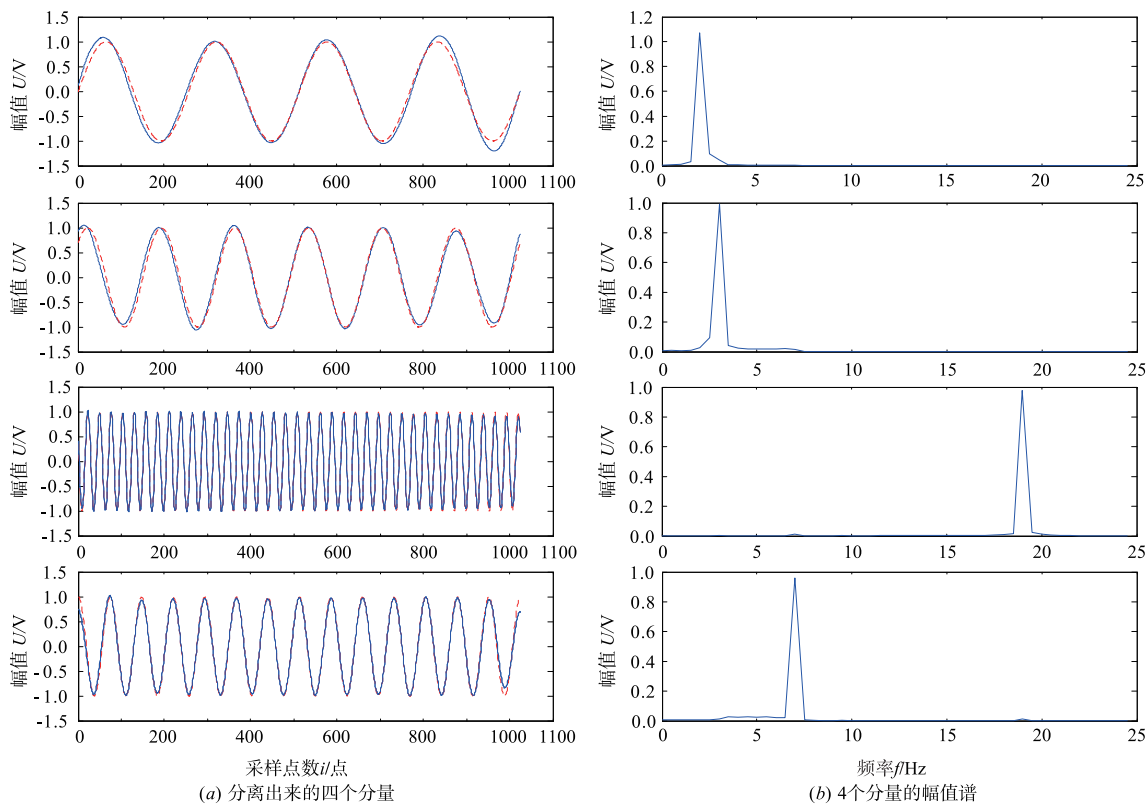


图7 添加噪声后SVD分离出来的四个分量

除了零相移外,这种信号分离方法的另外一个值得注意的特点是它可以分离出频率值相当接近的两个频率成分.本例中,分离出来的第一个分量信号的频率是2Hz,第二个分量信号的频率是3Hz,它们的频率仅仅相差1Hz,而从图7的分离结果可见,即使是对于频率如此接近的两个信号,SVD都将它们几乎完美地分离开来.事实上,通过对更多模拟信号的试验,我们发现,对于任意的两个频率,不管这两个频率在数值上有多接近,只要是在幅值谱中能够分辨出这两个频率成分的谱线,则SVD总是可以将这两个频率成分完全分离开来.

## 5 奇异值与频率及其幅值和相位的关系

第4节的结果表明,在添加噪声的情况下,选择某两个奇异值进行SVD重构,可以分离出单个的频率成分,那么对于信号中某一个具体的频率成分,它对应着奇异值序列中的哪两个奇异值呢?这就必须研究这两个奇异值与此频率的大小、幅值和相位的内在联系.不失一般性,设原始信号  $x(t)$  包含  $I$  个频率成分,由下式表示

$$x(t) = \sum_{i=1}^I a_i \sin(\omega_i t + \phi_i) \quad (9)$$

以采样周期  $T_s$  将  $x(t)$  离散化为  $x(j)$ ,并对  $x(j)$  添加零均值的白噪声  $\xi(j)$ .利用添加噪声后的信号构造

一个  $m \times n$  的 Hankel 矩阵  $\mathbf{H}$ ,显然  $\mathbf{H}$  可表示为单个频率分量构造的 Hankel 矩阵  $\mathbf{H}_i$  以及噪声  $\xi(j)$  构造的 Hankel 矩阵  $\mathbf{H}_\xi$  之和,即有:

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^I \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_\xi \quad (10)$$

其中  $\mathbf{H}_i$  是频率分量  $x_i(j) = a_i \sin(\omega_i T_s \cdot j + \phi_i)$  构造的  $m \times n$  的 Hankel 矩阵,如下式所示:

$$\mathbf{H}_i = \begin{pmatrix} a_i \cdot \sin[\omega_i T_s \cdot 0 + \phi_i] & a_i \cdot \sin[\omega_i T_s \cdot 1 + \phi_i] & \cdots & a_i \cdot \sin[\omega_i T_s \cdot (n-1) + \phi_i] \\ a_i \cdot \sin[\omega_i T_s \cdot 1 + \phi_i] & a_i \cdot \sin[\omega_i T_s \cdot 2 + \phi_i] & \cdots & a_i \cdot \sin[\omega_i T_s \cdot n + \phi_i] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_i \cdot \sin[\omega_i T_s \cdot (m-1) + \phi_i] & a_i \cdot \sin[\omega_i T_s \cdot m + \phi_i] & \cdots & a_i \cdot \sin[\omega_i T_s \cdot (N-1) + \phi_i] \end{pmatrix} \quad (11)$$

式中,  $m = N - n + 1$ ,而  $N$  是  $x_i(t)$  离散后的长度.

对  $\mathbf{H}$  进行奇异值分解,根据第3节的结果,当  $\min(m, n) > 2I$  时,  $I$  个频率分量将一共产生  $2I$  个非零奇异值,而噪声  $\xi(j)$  的奇异值排列在这  $2I$  个非零奇异值之后,因此  $\mathbf{H}$  的奇异值分解结果可表示为:

$$\sum_{i=1}^I \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_\xi = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^T + \cdots + \sigma_{2I} \mathbf{u}_{2I} \mathbf{v}_{2I}^T + \sum_{h=2I+1}^{\min(m, n)} \sigma_h \mathbf{u}_h \mathbf{v}_h^T \quad (12)$$

设添加噪声后频率分量  $x_i(j) = a_i \sin(\omega_i T_s \cdot j + \phi_i)$  对应

的两个奇异值为  $\sigma_k$  和  $\sigma_{k+1}$ , 此时由这两个奇异值进行 SVD 重构可以分离出  $x_i(j)$ , 因此由  $x_i(j)$  构造的分量矩阵  $\mathbf{H}_i$  完全可由这两个奇异值表示, 即有:

$$\mathbf{H}_i = \sigma_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^T + \sigma_{k+1} \mathbf{u}_{k+1} \mathbf{v}_{k+1}^T \quad (13)$$

设左奇异向量  $\mathbf{u}_l = [u_{l,1}, u_{l,2}, \dots, u_{l,m}]^T$ , 右奇异向量  $\mathbf{v}_l = [v_{l,1}, v_{l,2}, \dots, v_{l,n}]^T$ , 其中  $l = k, k+1$ , 则式 (13) 右边的矩阵  $\sigma_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^T + \sigma_{k+1} \mathbf{u}_{k+1} \mathbf{v}_{k+1}^T$  的能量为:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\sigma_k u_{k,i} v_{k,j} + \sigma_{k+1} u_{k+1,i} v_{k+1,j})^2 \\ &= \sigma_k^2 \sum_{i=1}^m u_{k,i}^2 \sum_{j=1}^n v_{k,j}^2 + \sigma_{k+1}^2 \sum_{i=1}^m u_{k+1,i}^2 \sum_{j=1}^n v_{k+1,j}^2 \\ & \quad + 2\sigma_k \sigma_{k+1} \sum_{i=1}^m (u_{k,i} u_{k+1,i}) \sum_{j=1}^n (v_{k,j} v_{k+1,j}) \end{aligned} \quad (14)$$

根据奇异值分解的性质可知,  $\mathbf{u}_l$  和  $\mathbf{v}_l$  都是单位正交向量, 因此有:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m u_{l,i}^2 &= 1, \quad \sum_{j=1}^n v_{l,j}^2 = 1, \quad \text{其中 } l = k, k+1 \\ \sum_{j=1}^n (v_{k,j} v_{k+1,j}) &= 0, \quad \sum_{i=1}^m (u_{k,i} u_{k+1,i}) = 0 \end{aligned}$$

将这些公式代入式 (14) 可得

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\sigma_k u_{k,i} v_{k,j} + \sigma_{k+1} u_{k+1,i} v_{k+1,j})^2 = \sigma_k^2 + \sigma_{k+1}^2 \quad (15)$$

可见式 (13) 右边矩阵的能量仅由两个奇异值决定, 而式 (13) 左边的矩阵  $\mathbf{H}_i$  的能量则显然是频率  $\omega_i$  及其幅值  $a_i$  的函数. 为了确定奇异值与  $\omega_i$  及  $a_i$  的关系, 必须求出矩阵  $\mathbf{H}_i$  的能量表达式, 这可先求矩阵  $\mathbf{H}_i$  的第  $l$  行元素的能量  $E_l$ , 根据式 (11) 可以得到:

$$\begin{aligned} E_l &= a_i^2 \sum_{j=l}^{n+l-1} \sin^2(\omega_i T_s \cdot j + \phi_i) \\ &= a_i^2 \sum_{j=l}^{n+l-1} \left[ \frac{1 - \cos(2\omega_i T_s \cdot j + 2\phi_i)}{2} \right], l = 0, 1, \dots, m-1 \end{aligned}$$

关于上式中余弦函数的求和, 通过计算可得到如下的一个通用公式:

$$\sum_{j=k}^K \cos[j \cdot \theta + \beta] = \frac{\cos\left(\frac{k+K}{2}\theta + \beta\right) \sin\left(\frac{K-k+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad (16)$$

利用式 (16), 可以计算得到  $\mathbf{H}_i$  的第  $l$  行元素的能量为:

$$\begin{aligned} E_l &= a_i^2 \left( \frac{n}{2} - \frac{\cos[(n+2l-1) \cdot \omega_i T_s + 2\phi_i] \sin(n \cdot \omega_i T_s)}{2\sin(\omega_i T_s)} \right), \\ & \quad l = 0, 1, \dots, m-1 \end{aligned} \quad (17)$$

则  $\mathbf{H}_i$  的所有  $m$  行元素的能量为:

$$\sum_{l=0}^{m-1} E_l = \sum_{l=0}^{m-1}$$

$$\begin{aligned} & a_i^2 \left( \frac{n}{2} - \frac{\cos[(n+2l-1) \cdot \omega_i T_s + 2\phi_i] \sin(n \cdot \omega_i T_s)}{2\sin(\omega_i T_s)} \right) \\ &= a_i^2 \left( \frac{mn}{2} - \frac{\sin(n \cdot \omega_i T_s)}{2\sin(\omega_i T_s)} \right. \\ & \quad \left. \sum_{l=0}^{m-1} \cos[(n+2l-1) \cdot \omega_i T_s + 2\phi_i] \right) \end{aligned}$$

上式中涉及到另一类型的余弦函数求和问题, 通过计算可以得到此类函数求和的一个通用公式:

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{m-1} \cos[(n+2l-1) \cdot \theta + \beta] \\ &= \frac{\sin(m \cdot \theta) \cos[(n+m-2)\theta + \beta]}{\sin(\theta)} \end{aligned} \quad (18)$$

利用式 (18), 可以得到矩阵  $\mathbf{H}_i$  的能量为:

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{m-1} E_l \\ &= a_i^2 \left( \frac{mn}{2} - \frac{\sin(n \cdot \omega_i T_s) \sin(m \cdot \omega_i T_s) \cos[(n+m-2)\omega_i T_s + 2\phi_i]}{2\sin^2(\omega_i T_s)} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

上式就是频率为  $\omega_i$ 、幅值为  $a_i$  的频率分量所构造的  $m \times n$  的 Hankel 矩阵的能量表达式.

考虑到式 (15), 可得到单个频率成分的幅值  $a_i$ 、频率  $\omega_i$  以及相位  $\phi_i$  与相应的两个奇异值的定量关系为:

$$\begin{aligned} & a_i^2 \left( \frac{mn}{2} - \frac{\sin(n \cdot \omega_i T_s) \sin(m \cdot \omega_i T_s) \cos[(n+m-2)\omega_i T_s + 2\phi_i]}{2\sin^2(\omega_i T_s)} \right) \\ &= \sigma_k^2 + \sigma_{k+1}^2 \end{aligned} \quad (20)$$

式 (20) 表明, 在矩阵行、列数以及采样周期确定了的情况下, 对于频率  $\omega_i$ , 它的奇异值大小由此频率  $\omega_i$ 、幅值  $a_i$  和相位  $\phi_i$  共同决定, 其中, 幅值  $a_i$  起的作用最大. 从式 (20) 可见, 频率  $\omega_i$  所对应的两个奇异值的能量与此频率的幅值  $a_i$  的平方成正比, 且其中的一个常数项比例系数是  $mn/2$ , 此比例系数是相当大的, 这使得  $a_i$  对奇异值的影响最大, 这在图 1(a) 中的阶梯状曲线也反映了.

而频率  $\omega_i$  与奇异值的大小则是一种复杂的非线性关系, 以频率范围 [8, 200] Hz 为例, 设所有频率的幅值均为  $a_i = 1$ 、相位  $\phi_i = 0$ 、采样周期为  $T_s = 1/1000$ 、数据长度为 512, 取  $m = 256$ 、 $n = 257$  构造 Hankel 矩阵, 则利用式 (20) 可以得到不同频率时两个奇异值能量的变化情况, 如图 8 所示, 可见这是一种复杂的波动关系, 随着频率的增大, 相应的两个奇异值的能量有较大的波动, 因此频率的影响不像幅值那样直观, 并不是频率越大, 其对应的奇异值就越大. 关于相位的影响, 从式 (20) 可见, 在其它参数确定的情况下, 相位  $\phi_i$  对奇异值能量的影响是一个以  $\pi$  为周期的余弦关系.

对于实际的信号, 其所含频率及其幅值和相位可以通过傅里叶变换得到, 则利用式 (20) 可以计算得到每个

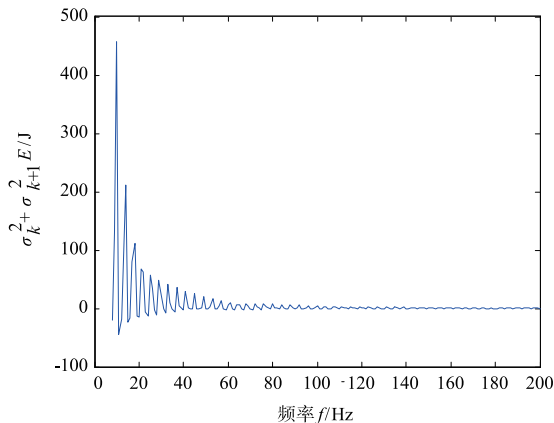


图8 频率值与奇异值大小的关系

频率所对应的两个奇异值的能量,由此可以在奇异值序列中确定各个频率所对应的奇异值位置,具体方法如下:(1)对原始信号进行傅里叶变换,得到信号中的频率 $\omega_i$ 、 $\omega_i$ 的幅值 $a_i$ 及相位 $\phi_i$ , $i=1,2,\dots$ 。(2)利用式(20)计算每一个频率 $\omega_i$ 所对应的两个奇异值的能量大小。(3)对全部频率的奇异值能量大小进行由大到小的排序。(4)对于某一个频率 $\omega_i$ ,如果其奇异值能量排在第 $j$ 位,根据奇异值成对出现的原理,则其所对应的两个奇异值分别是 $\sigma_{2j-1}$ 和 $\sigma_{2j}$ ,选择这两个奇异值进行SVD重构可以分离出频率成分 $\omega_i$ 。在多数情况下,可以根据幅值进行一个大致的选择,因为幅值 $a_i$ 对奇异值的影响最大,某频率的幅值越大,则其对应的两个奇异值也就越可能排在前面,因此选择前面的几对奇异值分别进行重构就可分离出原信号的那几个主要频率成分。

## 6 对轴承振动频率波形特征的提取

轴承是机械设备中常用的元件,其在转动时总是会产生振动,如果能观察到每个振动频率的时域波形,则可以准确地了解轴承的实际振动情况。图9是一个轴承振动加速度信号,从这个信号看不出明显的波形特征,此信号的幅值谱显示有4个主要的频率成分,如表1,其中的幅值反映的是这4个频率的平均幅值,但实际上每个频率在不同时刻的幅值是变化的。现在利用奇异值与频率的内在联系来提取这4个振动频率的时域波形,以便观察这4个频率振幅的变化情况。

从图9(b)的幅值谱可见,此信号在整个频段上都存在较多的毛刺,这说明原信号本身含有较多的随机噪声,因此这里就不再对其额外添加噪声。原信号的数据长度为1024,故利用图9(a)的时域信号构造 $512 \times 513$ 的Hankel矩阵并对其进行奇异值分解。因原信号中主要有4个幅值较大的频率成分,它们产生8个奇异值,而由于频率的幅值对奇异值的影响最大,因此这4个幅值较大的频率对应的很可能就是前8个奇异值,现在分别利用第1对、第2对、

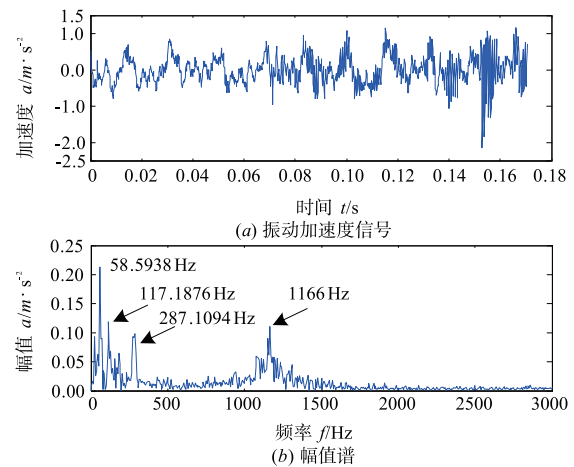


图9 轴承原始振动加速度信号及其幅值谱

第3对和第4对奇异值进行SVD重构,即有:

$$\mathbf{H}_i = \sigma_{2i-1} \mathbf{u}_{2i-1} \mathbf{v}_{2i-1}^T + \sigma_{2i} \mathbf{u}_{2i} \mathbf{v}_{2i}^T, \quad i=1,2,3,4 \quad (21)$$

得到的矩阵 $\mathbf{H}_i$ 也是一个 $512 \times 513$ 的矩阵,采用平均法<sup>[11]</sup>从 $\mathbf{H}_i$ ( $i=1,2,3,4$ )中恢复出信号,一共得到4个信号,如图10所示。从该图可见,每个信号都只有一个频率成分,分别与原信号的4个主要频率一一对应。将SVD分离出来的各个频率的幅值也列在表1中,对比可见SVD分离出来的频率幅值与原始信号中的幅值很接近,这说明在原始信号本身的噪声水平下,SVD对单个频率取得了很好的分离效果。

表1 原信号的频率幅值与SVD分离出的频率幅值对比

频率 $f/\text{Hz}$	原信号中的幅值 $a/\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$	SVD分离出的幅值 $a/\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
58.5938	0.2128	0.2006
117.1876	0.1184	0.1126
287.1094	0.0981	0.09687
1166	0.1109	0.1046

第1对奇异值恢复的频率成分是58.5938Hz,从其时域波形可见,此频率的幅值并非是一成不变的,在开始很长的一段长度内,此频率的幅值几乎呈线性增大趋势,不过增大的斜率较小,然后才进入了稳定的状态。第2对奇异值恢复的频率成分是287.1094Hz,从其时域波形可见,此振动频率的幅值在大约前三分之一时间内有较小的增长,但随后进入锥形衰减状态,其幅值线性降低,到最后变得非常小。第3对奇异值恢复的频率成分是117.1876Hz,此频率正好是58.5938Hz的2倍,它与58.5938Hz呈现出相似的变化趋势,其幅值开始线性增加,其后进入较为稳定的状态。第4对奇异值恢复的频率成分是1166Hz,此频率幅值的整个变化过程很复杂,刚开始时幅值呈一个微小的纺锤形,在第二阶段表现为一个稍大的纺锤形,然后在第三阶段幅值迅速增大,几乎呈指数增长状态,到最后其振幅远大于其它三个频率。

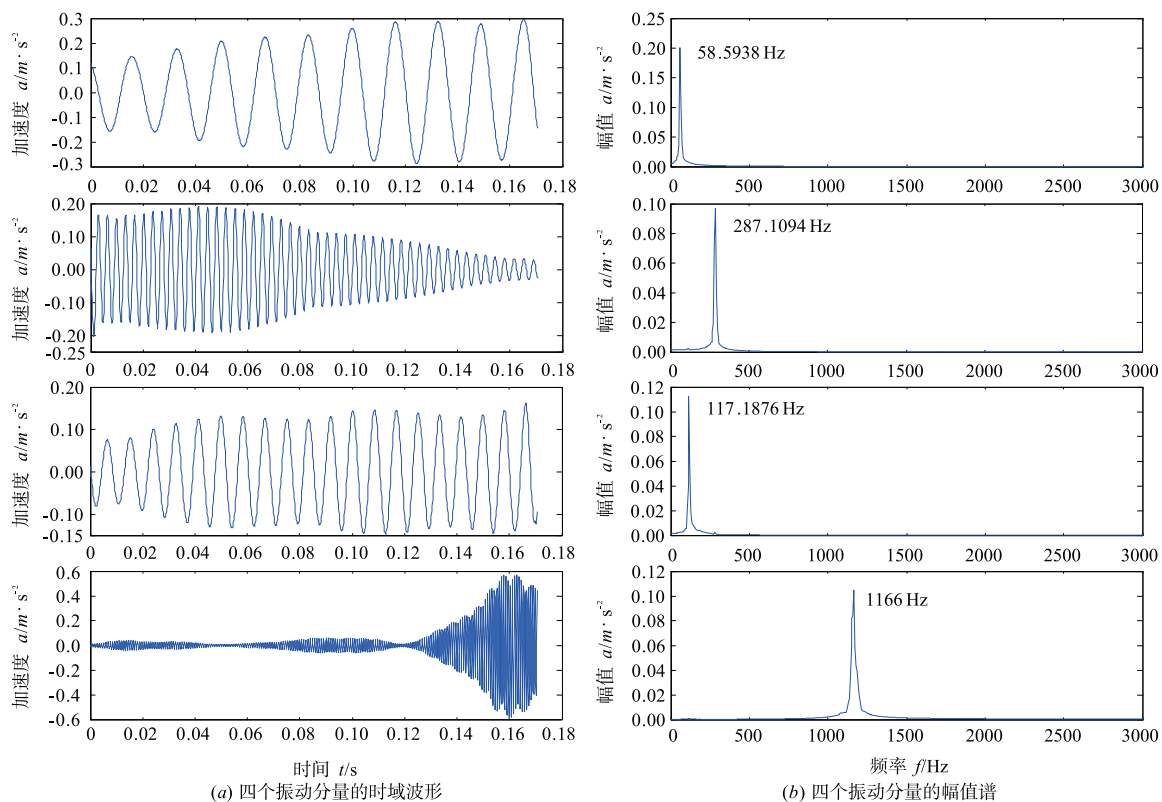


图10 SVD分离出来的四个振动分量及其幅值谱

从这四个频率幅值的变化过程可以分析该轴承的工作状态, 低频部分的 58.5938Hz 及其二倍频 117.1876Hz 在经过一段时间的增长后进入稳定的状态, 表明引起这两种振动频率的因素已经相对稳定, 而 287.1094Hz 的振动在轴承运转中逐渐变弱, 这表明引起这个频率的因素在轴承运转时受到磨合而逐渐消失, 但是高频部分的 1166Hz 经过一段时间的潜伏后, 幅值迅速增加而变得最大. 对于一个正常的轴承来说, 其高频振动是非常小的, 而高频振动的迅速增大说明此轴承的状态已经出现了问题, 而图 10 中第 4 个信号的时域波形反映了这高频振动的发生发展过程. 从该信号可见, 这种高频振动虽然在开始已经存在, 但是幅值非常小, 此时轴承状态还是正常的, 而经过一段时间的积累后这高频的幅值迅速增大, 并且这种增大呈指数增长趋势, 这表明此轴承故障的发展速度是很迅速的. 如果没有提取到这种时域波形, 就不可能观察到这种振动由潜伏到迅速恶化的整个过程. 频谱分析只能得到某个振动频率的平均幅值, 而不可能反映振动的这种发生发展过程, 仅仅从频域分析只能认为这个高频振动自始至终存在并且较大. 对另一频率 287.1094Hz 也是这样, 通过频谱分析只能认为这个频率始终存在, 但实际上这个频率最后快消失了.

## 7 结论

(1) 在 Hankel 矩阵方式下, 每个频率成分只能产生两个非零奇异值, 这两个非零奇异值在序号上是连续的, 中间不会存在其它频率成分产生的奇异值. 每个频率对应的两个非零奇异值的能量与该频率成分幅值的平方成正比, 但与频率大小是一种复杂的波动关系, 并不是频率越大, 奇异值就越大.

(2) 对于含有多个频率成分的确定性信号, 当矩阵维数小于信号中频率数量的二倍时, 随着维数的增加, 非零奇异值的数目将逐渐增多, 但当矩阵维数大于信号中频率数量的二倍时, 非零奇异值的数目将稳定下来, 此后不管维数再怎样增大, 非零奇异值的数目始终是信号中频率数量的两倍.

(3) 利用奇异值和频率的内在联系, 可以实现对单个频率的分离, 只要是幅值谱中可以分辨出的频率, 都可以利用 SVD 将它分离出来, 但前提是必须向信号中添加零均值的白噪声, 噪声添加的比例以占原信号能量的 10% ~ 30% 为宜.

(4) 在分离单个频率时, 奇异值必须成对选取, 且必须从奇数序号开始, 偶数序号结束, 不能选择两个在序号上不连续的两个奇异值进行重构.

## 参考文献

- [1] Demene C, Deffieux T, Pernot M, et al. Spatiotemporal clutter filtering of ultrafast ultrasound data highly increases Doppler and ultrasound sensitivity [J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2015, 34(11): 2271 – 2285.
- [2] 杜海顺, 张旭东, 金勇, 等. 基于低秩恢复稀疏表示分类的人脸图像识别方法 [J]. *电子学报*, 2014, 42(12): 2386 – 2393.  
Du Hai-shun, Zhang Xu-dong, Jin Yong, et al. Face image recognition method via Gabor low-rank recovery sparse representation-based classification [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2014, 42(12): 2386 – 2393. (in Chinese)
- [3] Mcgivney D F, Pierre E, Ma Dan, et al. SVD compression for magnetic resonance fingerprinting in the time domain [J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2014, 33(12): 2311 – 2322.
- [4] 廖律超, 蒋新华, 邹复民, 等. 一种支持轨迹大数据潜在语义相关性挖掘的谱聚类方法 [J]. *电子学报*, 2015, 43(5): 956 – 964.  
Liao Lü-chao, Jiang Xin-hua, Zou Fu-min, et al. A spectral clustering method for big trajectory data mining with latent semantic correlation [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2015, 43(5): 956 – 964. (in Chinese)
- [5] Zheng Chengshi, Peng Renhua, Li Jian, et al. A constrained MMSE LP residual estimator for speech dereverberation in noisy environments [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2014, 21(12): 1462 – 1466.
- [6] 胡谋法, 董文娟, 王书宏, 等. 奇异值分解带通滤波背景抑制和去噪 [J]. *电子学报*, 2008, 36(1): 111 – 116.  
Hu Mou-fa, Dong Wen-juan, Wang Shu-hong, et al. Singular value decomposition band-pass-filter for image background suppression and denoising [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2008, 36(1): 111 – 116. (in Chinese)
- [7] Yang W X, Tse P W. Development of an advanced noise reduction method for vibration analysis based on singular value decomposition [J]. *NDT&E International*, 2003, 36(6): 419 – 432.
- [8] 赵学智, 叶邦彦, 陈统坚. 奇异值差分谱理论及其在车床主轴箱故障诊断中的应用 [J]. *机械工程学报*, 2010, 46(1): 100 – 108.  
Zhao Xue-zhi, Ye Bang-yan, et al. Difference spectrum theory of singular value and its application to the fault diagnosis of headstock of lathe [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2010, 46(1): 100 – 108. (in Chinese)
- [9] 赵学智, 叶邦彦, 陈统坚. 基于奇异值曲率谱的有效奇异值选择 [J]. *华南理工大学学报(自然科学版)*, 2010, 38(6): 11 – 18.  
Zhao Xue-zhi, et al. Selection of effective singular values based on curvature spectrum of singular values [J]. *Journal of South China University of Technology (Natural Science Edition)*, 2010, 38(6): 11 – 18. (in Chinese)
- [10] 赵学智, 叶邦彦. SVD 和小波变换的信号处理效果相似性及其机理分析 [J]. *电子学报*, 2008, 36(8): 1582 – 1589.  
Zhao Xue-zhi, Ye Bang-yan. The similarity of signal processing effect between SVD and wavelet transform and its mechanism analysis [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2008, 36(8): 1582 – 1589. (in Chinese)
- [11] 赵学智, 叶邦彦. 分量形成方式对奇异值分解信号处理效果的影响 [J]. *上海交通大学学报*, 2011, 45(3): 368 – 374.  
Zhao Xue-zhi, Ye Bang-yan. Influence of formation manner of component on signal processing effect of singular value decomposition [J]. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2011, 45(3): 368 – 374. (in Chinese)

## 作者简介



赵学智 男, 1970 年出生于湖南邵东, 博士, 华南理工大学机械与汽车工程学院教授、博士生导师, 主要从事信号处理、奇异值分解理论与算法、模式识别和故障诊断等方面的研究。  
E-mail: mezhaoxz@scut.edu.cn



叶邦彦 男, 1949 年出生于广东广州, 博士, 华南理工大学机械与汽车工程学院教授、博士生导师, 中国图像图形学会高级会员、中国机械工程学会高级会员、全国高等学校制造自动化研究会常务理事兼中南分会理事长。主要从事制造过程状态监测、图像处理、机器视觉、计算机检测与控制等方面的研究工作。